Trung tâm ôn thi Cao học MSc - First step to get Master

BỘ TÀI CHÍNH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC TÀI CHÍNH & MARKETING
PGS. TS. Trần Lộc Hùng

HƯỚNG DẪN ÔN TẬP MÔN TOÁN KINH TẾ

(Chương trình ôn thi cao học các ngành Quản trị kinh doanh và Tài chính-Ngân hàng)

Thành phố Hồ Chí Minh, tháng 12 năm 2011

HƯỚNG DẪN ÔN TẬP MÔN TOÁN KINH TẾ

PGS. TS. Trần Lộc Hùng [1]

[1]Khoa Cơ bản. Trường Đại học Tài chính & Marketing Thành phố Hồ Chí Minh

Mục lục

1 Đề cương **7**

1.1 Yêu cầu 7

1.2 Nội dung 7

1.2.1 Toán cao cấp 7

1.2.2 Xác suất cơ sở 8

1.2.3 Thống kê ứng dụng 9

1.3 Bài tập 9

1.4 Tài liệu tham khảo 10

2 Đại số tuyến tính **11**

2.1 Ma trận 11

2.1.1 Định nghĩa. 11

2.1.2 So sánh hai ma trận. 13

2.1.3 Phép cộng hai ma trận. 13

2.1.4 Tính chất. 14

2.1.5 Phép nhân ma trận với một số 14

2.1.6 Phép nhân hai ma trận. 15

2.1.7 Tính chất. 16

2.1.8 Các phép biến đổi sơ cấp theo hàng 16

2.1.9 Các phép biến đổi sơ cấp theo cột 16

2.2 Định thức 17

2.2.1 Định nghĩa 17

2.2.2 Quy tắc Sarius. 19

2.2.3 Tính chất của định thức 19
2.2.4 Ma trận nghịch đảo. 20
2.3 Hệ phương trình tuyến tính 22
2.3.1 Định nghĩa. 22
2.3.2 Hệ Crame. 23
2.3.3 Phương pháp khử Gauss 25
2.4 Các mô hình kinh tế 27
2.4.1 Mô hình cân đối liên ngành (mô hình Input-Output của Leontief) 27
2.4.2 Mô hình cân bằng thị trường n hàng hóa có liên quan 30
2.4.3 Mô hình cân bằng thu nhập quốc dân 31

3 Giải tích toán học **35**
3.1 Phép tính vi tích phân hàm một biến 35
3.1.1 Hàm số. 35
3.1.2 Giới hạn của hàm số. 37
3.1.3 Tính liên tục của hàm số 39
3.1.4 Đạo hàm 40
3.1.5 Vi phân 41
3.1.6 Ứng dụng của đạo hàm 41
3.1.7 Tích phân bất định 42
3.1.8 Các tính chất cơ bản của tích phân bất định 43
3.1.9 Các phương pháp tính tích phân bất định 43
3.1.10 Tích phân xác định 45
3.2 Phép tính vi tích phân hàm hai biến 47
3.2.1 Khái niệm hàm hai biến 47
3.2.2 Giới hạn của hàm hai biến số 48
3.2.3 Tính liên tục của hàm hai biến 49
3.2.4 Đạo hàm riêng 50
3.2.5 Đạo hàm hàm hợp 54

3.2.6 Cực trị của hàm hai biến số 55
3.2.7 Giá trị lớn nhất và bé nhất 56
3.2.8 Cực trị có điều kiện 57
3.3 Ứng dụng trong phân tích kinh tế 60
3.3.1 Đạo hàm và giá trị cận biên 60
3.3.2 Đạo hàm và hệ số co dãn 61
3.3.3 Đạo hàm cấp 2 và Quy luật lợi ích cận biên giảm dần 62
3.3.4 Bài toán tối ưu 62
3.3.5 Ứng dụng của tích phân trong kinh tế học 63
3.3.6 Ứng dụng của đạo hàm riêng trong kinh tế học . . 64
3.3.7 Đạo hàm riêng cấp hai và quy luật lợi ích cận biên giảm dần 66
3.3.8 Đạo hàm riêng và hệ số co dãn 67

4 Xác suất cơ sở **71**
4.1 Các khái niệm cơ bản về xác suất 71
4.1.1 Biến cố ngẫu nhiên 71
4.1.2 Xác suất của biến cố ngẫu nhiên 72
4.1.3 Các công thức xác suất cơ bản 75
4.1.4 Các biến cố độc lập 78
4.1.5 Dãy phép thử Bernoulli 79
4.2 Biến ngẫu nhiên và các đặc trưng 85
4.2.1 Biến ngẫu nhiên 85
4.2.2 Hàm phân phối xác suất 85
4.2.3 Biến ngẫu nhiên rời rạc 86
4.2.4 Biến ngẫu nhiên liên tục và hàm mật độ xác suất . 87
4.2.5 Kỳ vọng toán 88
4.2.6 Phương sai 88
4.2.7 Các mô men 89
4.2.8 Median (Trung vị) 89

4.2.9 Mod (số trội) của biến ngẫu nhiên 89
4.3 Các định lý giới hạn của Lý thuyết xác suất 93
4.3.1 Phân phối Bernoulli 93
4.3.2 Phân phối nhị thức 94
4.3.3 Phân phối Poisson 95
4.3.4 Phân phối mũ 96
4.3.5 Phân phối chuẩn 97
4.3.6 Phân phối chuẩn chính tắc N(0,1) 97
4.3.7 Định lý xấp xỉ Poisson 98
4.3.8 Định lý giới hạn địa phương de Moivre-Laplace . . 98
4.3.9 Định lý giới hạn tích phân de Moivre-Laplace . . . 99

5 Thống kê ứng dụng **101**
5.1 Mẫu ngẫu nhiên và các đặc trưng mẫu 101
5.1.1 Mẫu ngẫu nhiên 101
5.1.2 Các đặc trưng của mẫu ngẫu nhiên: 102
5.2 Ước lượng khoảng 106
5.2.1 Khoảng ước lượng cho trung bình tổng thể 106
5.2.2 Khoảng ước lượng cho trung bình tổng thể 106
5.3 Kiểm định giả thuyết thống kê 109
5.3.1 Kiểm định trung bình tổng thể 109
5.3.2 Kiểm định tỷ lệ tổng thể 112
5.3.3 Kiểm định giả thuyết về sự bằng nhau của tỷ lệ của hai tổng thể 114
5.3.4 Kiểm định giả thuyết về sự bằng nhau của hai trung bình 115

Chương 1

Đề cương

1.1 Yêu cầu

Chương trình ôn tập này được xây dựng nhằm đảm bảo cho việc tuyển chọn các học viên có đủ kiến thức cần thiết về Toán Kinh tế (bao gồm Toán cao cấp, Xác suất và Thống kê) để học viên có khả năng tiếp thu tốt các môn học ở bậc sau đại học, đồng thời có thể vận dụng tốt các kiến thức toán học này trong nghiên cứu, trong quá trình làm luận án tốt nghiệp và ứng dụng trong trong lĩnh vực kinh tế.

1.2 Nội dung

1.2.1 Toán cao cấp

(tương đương 25 tiết giảng, được đánh giá 4 điểm trong thang điểm 10)

Mô tả: Cung cấp kiến thức cơ bản về Đại số tuyến tính và Giải tích toán học thực sự cần thiết cho việc tiếp cận các mô hình phân tích và ra quyết định trong kinh tế. Nội dung chính của phần này bao gồm:

1. Đại số tuyến tính:
   (a) Ma trận và các phép toán ma trận
   (b) Định thức của ma trận vuông
   (c) Ma trận nghịch đảo của ma trận vuông
   (d) Hệ phương trình tuyến tính
   (e) Hệ Cramer và phương pháp Cramer

(f) Phương pháp khử Gauss

2. Đại số tuyến tính và các mô hình toán kinh tế:

   (a) Mô hình cân đối liên ngành/Mô hình Input-Output của Leontief

   (b) Mô hình cân bằng thị trường n hàng hóa có liên quan

   (c) Mô hình cân bằng thu nhập quốc dân

3. Giải tích toán học:

   (a) Phép tính vi tích phân hàm một biến (liên tục, đạo hàm, vi phân, tích phân bất định, tích phân xác định)

   (b) Phép tính vi tích phân hàm hai biến (giới hạn, liên tục, đạo hàm riêng, vi phân toàn phần, bài toán cực trị)

4. Giải tích toán học và các bài toán kinh tế

   (a) Đạo hàm và giá trị cận biên, hệ số co dãn, quy luật lợi ích cận biên giảm dần

   (b) Cực trị và bài toán xác định mức sử dụng lao động L để sản lượng hoặc lợi nhuận tối đa

   (c) Tích phân và bài toán xác định hàm tổng khi biết hàm giá trị cận biên, bài toán xác định quỹ vốn dựa vào hàm đầu tư

   (d) Đạo hàm riêng và quy luật lợi ích cận biên giảm dần. Hệ số co dãn.

1.2.2 Xác suất cơ sở

(tương đương 25 tiết giảng, được đánh giá 3 điểm trong thang điểm 10)

Mô tả: Giới thiệu tính quy luật của hiện tượng tự nhiên, các công thức xác suất cơ bản, các quy luật xác suất cơ bản cùng các kết quả quan trọng của Lý thuyết xác suất như Luật yếu các số lớn và các định lý giới hạn. Nội dung chính của phần này bao gồm:

1. Định nghĩa xác suất theo các quan điểm đồng khả năng và quan điểm tần suất.

2. Các công thức xác suất cơ bản (xác suất có điều kiện, công thức nhân xác suất, công thức cộng xác suất, công thức xác suất đầy đủ, công thức Bayes, dãy phép thử độc lập Bernoulli và công thức Bernoulli).

3. Biến ngẫu nhiên rời rạc và bảng phân phối xác suất. Hàm phân phối xác suất. Biến ngẫu nhiên liên tục và hàm mật độ xác suất (định nghĩa, các tính chất, ý nghĩa).

4. Các đặc trưng số của biến ngẫu nhiên: kỳ vọng toán, phương sai, độ lệch tiêu chuẩn, trung vị, số trội, các phân vị (định nghĩa, tính chất, ý nghĩa).

5. Các phân phối xác suất thường gặp: phân phối Bernoulli $B(p)$, phân phối nhị thức $B_n(p)$, phân phối Poisson $P(\lambda)$, phân phối mũ $Exp(\lambda)$, phân phối chuẩn $\mathfrak{N}(0,1)$, phân phối khi-bình phương $\chi^2(n)$, phân phối Student $T(n)$, phân phối Fisher-Snedecor $F(n_1, n_2)$.

6. Định lý xấp xỉ Poisson. Các định lý giới hạn de Moivre-Laplace(Định lý, ý nghĩa và ứng dụng).

1.2.3 Thống kê ứng dụng

(tương đương 25 tiết giảng, đánh giá 3 điểm trong thang điểm 10)

Mô tả: Cung cấp cơ sở về điều tra chọn mẫu, khảo sát dữ liệu kinh tế và điều tra xã hội học, các phương pháp ước lượng và kiểm định giả thuyết thống kê trong nghiên cứu các vấn đề thực tế nói chung và các vấn đề kinh tế nói riêng. Nội dung chính của phần này bao gồm:

1. Tổng thể và mẫu ngẫu nhiên. Các đặc trưng của mẫu (trung bình mẫu, phương sai mẫu, phương sai mẫu điều chỉnh, tần suất mẫu).

2. Ước lượng khoảng. Khoảng tin cậy cho các tham số tổng thể (trung bình μ và xác suất p).

3. Kiểm định giả thuyết thống kê (kiểm định giá trị trung bình tổng thể, kiểm định giá trị xác suất tổng thể, so sánh hai giá trị trung bình, so sánh hai tỷ lệ)

1.3 Bài tập

Để giải được các bài tập tương ứng với 3 phần lý thuyết ở trên, yêu cầu học viên hiểu bản chất các bài toán và vận dụng thành thạo các kỹ năng của toán cao cấp, xác suất và thống kê.

1.4 Tài liệu tham khảo

1. Nguyễn Huy Hoàng, Toán cao cấp, Tập 1: Đại số tuyến tính (Dùng cho sinh viên các ngành kinh tế và Quản trị kinh doanh), NXB Giáo dục Việt Nam, 2010.

2. Nguyễn Huy Hoàng, Toán cao cấp, Tập 2: Giải tích toán học (Dùng cho sinh viên các ngành kinh tế và Quản trị kinh doanh), NXB Giáo dục Việt Nam, 2010.

3. Trần Lộc Hùng, Lý thuyết xác suất và Thống kê Toán học, NXB Giáo dục, 1997, 1998 (Tái bản).

4. Trần Lộc Hùng, Bài tập Lý thuyết xác suất và Thống kê Toán học, NXB Giáo dục, 1999.

5. Trần Lộc Hùng, Giáo trình xác suất và Thống kê, NXB Giáo dục, 2005.

6. Trần Lộc Hùng, Hướng dẫn giải bài tập xác suất thống kê, NXB Giáo dục, 2005.

7. Lê Đình Thúy, Toán cao cấp cho các nhà kinh tế, Phần I: Đại số tuyến tính, NXB Đại học Kinh tế quốc dân, 2010.

8. Lê Đình Thúy, Toán cao cấp cho các nhà kinh tế, Phần II: Giải tích toán học, NXB Đại học Kinh tế quốc dân, 2010.

9. Nguyễn Cao Văn và Trần Thái Ninh, Giáo trình Lý thuyết xác suất và thống kê toán, NXB Đại học Kinh tế quốc dân, 2008.

10. Nguyễn Cao Văn và Trần Thái Ninh, Lý thuyết xác suất và thống kê toán (Hướng dẫn ôn tập lý thuyết và giải bài tập), NXB tài chính, 2009.

Người soạn:

- PGS.TS. Trần Lộc Hùng
- Khoa Cơ bản, Trường Đại học Tài chính & Marketing

Chương 2

Đại số tuyến tính

2.1 Ma trận

2.1.1 Định nghĩa.

Một bảng chữ nhật gồm $(m \times n)$phần tử

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

được gọi là một ma trận cấp $(m \times n)$, ký hiệu $A = (a_{ij})_{mn}$.

Trong đó:

- Phần tử $a_{ij} \in (A)$ là phần tử dòng i cột j của ma trận A
- Nếu m=n, thì A là ma trận vuông cấp n, ký hiệu $A = (a_{ij})_n$.

Ma trận đơn vị. Ma trận $(a_{ij})_n, a_{ii} = 1, a_{ij} = 0, i, j = 1, \dots n$

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

được gọi là một ma trận đơn vị cấp (n), ký hiệu I_n.

Ma trận chuyển vị. Ma trận chuyển vị A^T của ma trận $A = (a_{ij})_{m \times n}$

là ma trận

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

trong đó:

- Các phần tử của A^T đối xứng với các phần tử của A qua đường chéo chính
- Dễ dàng thấy $(A^T)^T = A$
- Có quan hệ $A^T = B^T \Longleftrightarrow A = B$

Ví dụ 2.1.1 Ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

có ma trận chuyển vị A^T

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Ma trận tam giác. Ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n}$ là ma trận tam giác, nếu các phần tử nằm trên (hoặc dưới) đường chéo chính bằng 0

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

hoặc

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Ma trận hình thang. Ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n}$ là ma trận hình thang,

nếu

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & a_{m,n-1} & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ma trận con. Ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n}$ có ma trận con A_{ij}, là ma trận A bỏ đi các phần tử ở hàng i và cột j

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

có ma trận con

$$A_{12} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$$

2.1.2 So sánh hai ma trận.

Hai ma trận $(A) = (a_{ij})_{m\times n}$ và $(B) = (b_{ij})_{m\times n}$ cùng cấp được gọi bằng nhau nếu $a_{ij} = b_{ij}$: $\quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n$

Ví dụ 2.1.2 Có a=1, b=0, c=8, và d=0 để hai ma trận A và B bằng nhau, trong đó

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 3 \\ 1 & b+1 & 6 \\ 0 & c & 9 \end{pmatrix}$$

và Ma trận B

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2d+1 & 3 \\ 1 & 1 & 6 \\ 0 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

2.1.3 Phép cộng hai ma trận.

Tổng (hiệu) của hai ma trận $(A) = (a_{ij})_{m\times n}$ và $(B) = (b_{ij})_{m\times n}$ cùng cấp, là ma trận $C = (c_{ij})$, $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$: $\quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n$

Ví dụ 2.1.3 Cho hai ma trận A và B

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

và

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Khi đó, ma trận C=A+B

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 8 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

và ma trận D=A-B

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \\ 7 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

2.1.4 Tính chất.

Cho các ma trận cùng cấp $A, B, C \in M_{m\times n}$, khi đó

- A+B=B+A
- A+(B+C)=(A+B)+C
- A+O=O+A=A
- $(A + B)^T = A^T + B^T$

2.1.5 Phép nhân ma trận với một số

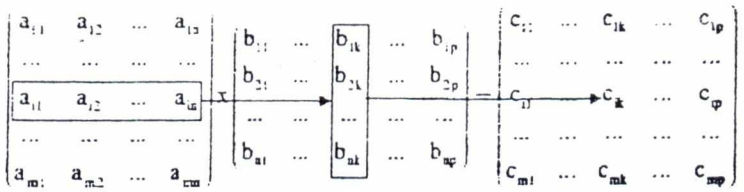
Tích của ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n}$ với một số λ, là một ma trận $B = (b_{ij})$, $b_{ij} = \lambda a_{ij}; \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 1, 2, \ldots, n$

Tính chất. Cho các ma trận cùng cấp $A, B, C \in M_{m\times n}$ và các số thực α, β. Khi đó

- $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$
- $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$
- $(\alpha A)^T = \alpha A^T$

2.1.6 Phép nhân hai ma trận.

Tích của ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n}$ với một ma trận $B = (b_{ij})_{n\times p}$ là một ma trận $C = (c_{ij})_{m\times p}$; $c_{ij} = \sum_k^n a_{ik}b_{kj} \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 1, 2, \ldots, p$



Ví dụ 2.1.4 Ma trận A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

và ma trận B

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

cho ma trận AB

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

và ma trận BA

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2.1.7 Tính chất.

Cho các ma trận A, B, C sao cho các tính tích các ma trận thực hiện được. Giả sử cho trước các số thực α, β. Khi đó

- $\alpha(AB) = (\alpha A)B$
- $(AB)C = A(BC)$
- $A(B + C) = AB + AC$
- $(A + B)C = AC + BC$
- $AB \neq BA$
- $(AB)^T = B^T A^T$

2.1.8 Các phép biến đổi sơ cấp theo hàng

Cho ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n}$. Các phép biến đổi sau được gọi là phép biến đổi sơ cấp theo hàng

- Nhân các phần tử của một hàng thứ i với cùng một số $\alpha \neq 0$.
- Hoán vị hai hàng thứ i và thứ j
- Cộng vào các phần tử của hàng thứ j các phần tử hàng thứ i đã nhân với cùng một số $\alpha \neq 0$.

Ví dụ 2.1.5 Ma trận A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ma trận A sau các phép biến đổi sơ cấp thành ma trận B

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.1.9 Các phép biến đổi sơ cấp theo cột

Cho ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n}$. Các phép biến đổi sau được gọi là phép biến đổi sơ cấp theo cột

- Nhân các phần tử của một cột thứ i với cùng một số $\alpha \neq 0$.
- Hoán vị hai cột thứ i và thứ j
- Cộng vào các phần tử của cột thứ j các phần tử cột thứ i đã nhân với cùng một số $\alpha \neq 0$.

Ví dụ 2.1.6 Ma trận C

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ma trận C sau các phép biến đổi sơ cấp theo cột thành ma trận D

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2/3 \end{pmatrix}$$

Bài tập

2.1.1 Xác định 3A+2B-C, nếu

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

2.2 Định thức

2.2.1 Định nghĩa

Cho một ma trận A vuông cấp n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Định thức của ma trận A, ký hiệu $\det(A) = |\ a_{ij}\ |$, là một số thực xác định bởi

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in},$$

trong đó $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ với M_{ij} là định thức có từ ma trận A bằng cách bỏ dòng i và cột $j, i, j = 1, 2, \dots n$.

Chú ý. Ta còn có

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}.$$

Ví dụ 2.2.1 Ma trận cấp 3

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

có định thức cấp 3

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

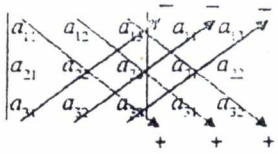
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Ví dụ 2.2.2

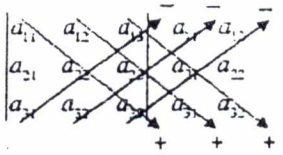
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

có định thức $\det(A) = 0$

2.2.2 Quy tắc Sarius.



- Viết theo thứ tự hai cột 1 và cột 2
- Ba số hạng đầu mang dấu cộng (+) trong định thức là tích của các phần tử nằm trên ba đường song song với đường chéo chính
- Ba số hạng mang dấu trừ (-) trong định thức là tích của các phần tử nằm trên ba đường song song với đường chéo phụ



2.2.3 Tính chất của định thức

Với một định thức cấp bất kỳ

- Giá trị định thức không thay đổi khi khai triển theo một hàng (hoặc một cột)
- $\det(A)^T = \det(A)$
- Định thức đổi dấu nếu đổi vị trí hai hàng (hoặc hai cột)
- Định thức bằng 0 nếu có hai hàng hay hai cột giống nhau
- Nếu nhân các phần tử của một hàng (hoặc một cột) của định thức với số $\lambda \neq 0$, thì giá trị định thức được nhân thêm λ
- Định thức bằng 0 nếu có hai hàng (hay hai cột) tỷ lệ
- Giá trị định thức không thay đổi nếu ta cộng vào các phần tử của một hàng những phần tử của hàng khác nhân với một số $\lambda \neq 0$
- Định thức của ma trận tam giác bằng tích các phần tử trên đường chéo chính

Ví dụ 2.2.3 Dựa vào các tính chất của định thức, sau các phép biến đổi.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} \begin{matrix} d_2 \to d_2 - d_1 \\ d_3 \to d_3 - d_1 \\ d_4 \to d_4 - d_1 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 10 \end{vmatrix} \begin{matrix} d_3 \to d_3 - d_1 \\ d_4 \to d_4 - d_2 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} \begin{matrix} d_4 \to d_4 - 2d_3 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

ta có

$$\det(A) = 1$$

2.2.4 Ma trận nghịch đảo.

Cho ma trận $A = (a_{ij})_n$. Ma trận nghịch đảo của ma trận A, ký hiệu A^{-1}, là ma trận B sao cho

$$A \times B = I_n$$

- Ma trận A được gọi là ma trận khả nghịch
- Ma trận I_n là ma trận đơn vị cấp n
- Ma trận A khả nghịch khi và chỉ khi $\det(A) \neq 0$
- Giả sử A là một ma trận khả nghịch. Khi đó, ma trận nghịch đảo A^{-1} xác định bởi

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} C^T$$

ở đây

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

với $c_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij})$, $\det(M_{ij})$ là định thức của ma trận con ứng với phần tử a_{ij} của ma trận A, c_{ij} được gọi là phần bù đại số ứng với phần tử a_{ij} của ma trận A.

Ví dụ 2.2.4 Ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

có $\det(A) = 2 \neq 0$. Có ma trận

$$C^T = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Khi đó, ma trận nghịch đảo A^{-1} của ma trận A là

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5/2 & 1/2 \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & -3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Bài tập

2.2.1 Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Tính định thức $| A |$
2. Tìm ma trận phụ hợp A^*
3. Chứng tỏ rằng $A \times A^* = A^* \times A = | A | \times I_3$

2.2.2 Tìm ma trận nghịch đảo A^{-1} của ma trân

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

2.2.3 Tìm ma trận nghịch đảo $(I_3 - A)^{-1}$, với ma trân

$$A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,1 \\ 0,1 & 0,3 & 0,4 \\ 0,2 & 0,2 & 0,3 \end{pmatrix}$$

2.2.4 Giải phương trình $AX = B$, với

$$A - \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

và

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$$

2.3 Hệ phương trình tuyến tính

2.3.1 Định nghĩa.

Hệ m phương trình tuyến tính với n ẩn

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

trong đó

- Gồm m phương trình tuyến tính bậc nhất
- Có n ẩn số $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
- Bộ nghiệm $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ thỏa mãn tất cả các phương trình của hệ

Ma trận hệ số và ma trận ẩn. Ma trận

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

được gọi là ma trận hệ số. Ma trận X

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

được gọi là ma trận ẩn. Ma trận

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

được gọi là ma trận hệ số tự do. Ma trận $\overline{A}$ là ma trận hệ số mở rộng

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

2.3.2 Hệ Crame.

Hệ phương trình

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = b_n \end{cases}$$

trong đó:

- Gồm n phương trình tuyến tính bậc nhất và n ẩn (m=n)
- Có n ẩn số $(x_1, x_2, \dots, x_n)$
- Bộ nghiệm $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ thỏa mãn tất cả các phương trình của hệ
- Định thức khác 0, $\det(A) \neq 0$

Định lý Crame. Hệ Crame có duy nhất nghiệm $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, thỏa mãn

$$\alpha_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}, j = 1, 2, \dots, n$$

trong đó:

- Định thức cơ sở $\det(A) \neq 0$
- Định thức A_j là định thức ma trận cơ sở (A) có cột thứ j bị thay bởi

cột hệ số tự do B

$$\det(A_j) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Chú ý: Ma trận có cột thứ j được thay bởi cột hệ số tự do B

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & b_3 & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \leftarrow \text{Cột j}$$

Ví dụ 2.3.1 Giải hệ phương trình bằng phương pháp Crame

$$\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 9 \\ x + 2y - 3z = 14 \\ 3x + 4y + z = 16 \end{cases}$$

Định thức cơ sở có $\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$ nên hệ có duy nhất nghiệm (x, y, z)

Nghiệm của hệ phương trình là (2, 3, -2)

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 9 & 3 & 2 \\ 14 & 2 & -3 \\ 16 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{-6} = 2,\ y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 9 & 2 \\ 1 & 14 & -3 \\ 3 & 16 & 1 \end{vmatrix}}{-6} = 3,\ z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 14 \\ 3 & 4 & 16 \end{vmatrix}}{-6} = -2.$$

Chú ý:

- Phương pháp Cramer chỉ thích hợp với hệ Cramer (số nghiệm bằng số phương trình và có $\det(A) \neq 0$)
- Phương pháp Cramer không thích hợp khi số nghiệm lớn (để tìm n nghiệm ta phải tính (n+1) định thức)
- Trong trường hợp hệ không phải Cramer thường sử dụng phương pháp khử Gauss

2.3.3 Phương pháp khử Gauss

Sử dụng các phép biến đổi sơ cấp

• Đưa hệ phương trình đang xét (AX=B)về một hệ phương trình tương đương bằng phép biến đổi sơ cấp

• Giải hệ phương trình tương đương

Phép biến đổi sơ cấp. Gồm các phép biến đổi sau

• Đổi chỗ hai phương trình của hệ

• Nhân một phương trình của hệ với một số thực khác 0

• Cộng vào một phương trình một tổ hợp tuyến tính của các phương trình khác trong hệ

• Sau một số hữu hạn bước, hệ phương trình (AX=B) với ma trận mở rộng $\overline{A}$ được đưa về một hệ phương trình tương đương với ma trận mở rộng $\overline{A'}$ dạng sau

$$\overline{A'} = \begin{pmatrix} \overline{a}_{11} & * & \dots & * & * & \dots & * & \overline{b}_1 \\ 0 & \overline{a}_{22} & \dots & * & * & \dots & * & \overline{b}_2 \\ \dots & \dots & \dots & * & * & \dots & * & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \overline{a}_{rr} & * & \dots & * & \overline{b}_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \overline{b}_{r+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \overline{b}_m \end{pmatrix},$$

trong đó $\overline{a}_{ii} \neq 0$ $(1 \leq i \leq r)$ và các dấu $*$ ký hiệu các số thực có thể khác 0.

Nhận xét:

• Nếu một trong các số thực $\overline{b}_{r+1}, \dots, \overline{b}_m$ khác 0, thì hệ phương trình vô nghiệm

• Nếu $\overline{b}_{r+1} = \cdots = \overline{b}_m = 0$, thì hệ phương trình có nghiệm. Hơn nữa, mỗi nghiệm của hệ phương trình đều có thể nhận được bằng cách gán cho $x_{r+1}, \dots, x_n$ các giá trị thực tùy ý, rồi giải duy nhất $x_1, \dots, x_r$ theo các giá trị đã gán cho $x_{r+1}, \dots, x_n$.

Ví dụ 2.3.2 Hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 &= 2 \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 &= -1 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 1 \end{cases}$$

sau khi biến đổi thành

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 7 & -1 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 13 & -5 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \overline{A'}.$$

nên hệ phương trình đã cho vô nghiệm

Ví dụ 2.3.3 Hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 &= 3 \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 8x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 &= 5 \\ 5x_1 + 18x_2 + 4x_3 + 5x_4 &= 12 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & -9 & 8 & 1 \\ 2 & 7 & 3 & 1 & 5 \\ 5 & 18 & 4 & 5 & 12 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -7 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vậy hệ phương trình tương đương với hệ

$$\begin{cases} x_1 &= 6 - 26x_3 + 17x_4 \\ x_2 &= -1 + 7x_3 - 5x_4 \end{cases}$$

Do đó hệ có nghiệm là

$$(6 - 26a + 17b, -1 + 7a - 5b, a, b), \quad \text{với} \quad a, b \quad \text{tùy ý}.$$

Bài tập

2.3.1 Giải hệ phương trình bằng phương pháp khử ẩn Gauss

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 &= 3 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 &= 7 \\ -x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 0 \end{cases}$$

2.3.2 Giải hệ phương trình bằng phương pháp Cramer

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 = 7 \\ -3x_1 + x_3 = -8 \\ 2x_2 + 2x_3 = -3 \end{cases}$$

2.3.3 Giải hệ phương trình bằng phương pháp ma trận nghịch đảo

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 + x_3 = 16 \\ 5x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$$

2.3.4 Giải và biện luận hệ phương trình sau theo k

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + kx_3 = 3 \\ x_1 + kx_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$$

2.4 Các mô hình kinh tế

2.4.1 Mô hình cân đối liên ngành (mô hình Input-Output của Leontief)

Bài toán 1. Trong một nền kinh tế hiện đại, việc sản xuất một loại sản phẩm hàng hóa nào đó (output) đòi hỏi phải sử dụnq các loại hàng hóa khác nhau để làm nguyên liệu đầu vào (input) của quá trình sản xuất và việc xác định tổng cầu đối với sản phẩm của mỗi ngành sản xuất trong tổng thể nền kinh tế là quan trọng. Tổng cầu bao gồm

1. Cầu trung gian từ phía các nhà sản xuất sử dụng loại sản phẩm đó cho quá trình sản xuất.

2. Cầu cuối cùng từ phía người sử dụng sản phẩm để tiêu dùng hoặc xuất khẩu, bao gồm các hộ gia đình, Nhà nước, các doanh nghiệp, ...

Mô hình. Giả sử một nền kinh tế có n ngành sản xuất, ngành 1, 2, ..., n. Để thuận tiện cho việc tính chi phí cho các yếu tố sản xuất, ta biểu diễn lượng cầu của tất cả các loại hàng hóa ở dạng giá trị (đo bằng tiền). Khi

đó tổng cầu về sản phẩm hàng hóa của ngành i (i=1, 2, ..., n) được ký hiệu và xác định bởi

$$x_i = x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{ik} + b_i$$

ở đây

- x_{ik} là giá trị sản phẩm của ngành i mà ngành k cần sử dụng cho quá trình sản xuất của mình (giá trị cầu trung gian).
- b_i là giá trị sản phẩm của ngành i dành cho nhu cầu tiêu dùng và xuất khẩu (giá trị cuối cùng).

Tuy nhiên, trong thực tế, thường không có thông tin về giá trị cầu trung gian x_{ik}, nhưng người ta lại chủ động trong việc xác định tỉ phần chi phí đầu vào của sản xuất. Ký hiệu a_{ik} là tỷ phần chi phí đầu vào của ngành k đối với sản phẩm của ngành i, được xác định bởi công thức

$$a_{ik} = \frac{x_{ik}}{x_k}, i, k = 1, 2, \ldots, n$$

Chú ý:

- $0 \leq a_{ik} < 1$ và cố định đối với mỗi ngành sản xuất i, $(k = 1, 2, \ldots n)$
- a_{ik} là hệ số chi phí đầu vào. Ma trận $A = (a_{ik})$ là ma trân chi phí đầu vào (ma trận hệ số kỹ thuật)

Ví dụ 2.4.1 Giả sử $a_{ik} = 0.3$ có nghĩa là để sản xuất ra 1 đồng giá trị sản phẩm của mình, ngành k đã phải chi cho 0,3 đồng để mua sản phẩm của ngành i phục vụ cho quá trình sản xuất.

Mô hình toán: Gọi X là ma trận tổng cầu, b là ma trận cầu cuối cùng, ta có

$$X = AX + b$$

với

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

hay

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & +b_1 \\ x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & +b_2 \\ \cdots\cdots \\ x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & +b_n \end{cases}$$

Giải mô hình. Công thức ma trận tổng cầu

$$X = (I_n - A)^{-1} \times b$$

- I_n là ma trận đơn vị cấp n
- Ma trận Leontief $(I - A)$

Ví dụ 2.4.2 Giả sử trong một nền kinh tế có hai ngành sản xuất I và II có ma trận hệ số kỹ thuật là

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 \\ 0,4 & 0,1 \end{pmatrix}$$

Nếu giá trị cầu cuối cùng đối với sản phẩm của ngành I và ngành II là 10 và 20 tỷ đồng, thì ma trận giá trị tổng cầu đối với mỗi ngành sẽ là

$$X = \begin{pmatrix} 25 \\ 100/3 \end{pmatrix}$$

hay giá trị tổng cầu của ngành I là $x_1 = 25$ (tỷ đồng) và giá trị tổng cầu của ngành II là $x_2 = \frac{100}{3}$ (tỷ đồng).

Bài tập

2.4.1 Trong mô hình cân đối liên ngành, hãy xác định ma trận tổng cầu, nếu

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 \\ 0,4 & 0,1 \end{pmatrix}$$

và

$$b = \begin{pmatrix} 20 \\ 5 \end{pmatrix}$$

2.4.2 Trong mô hình cân đối liên ngành, hãy xác định ma trận tổng cầu, nếu

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 \\ 0,1 & 0,3 \end{pmatrix}$$

và

$$b = \begin{pmatrix} 200 \\ 300 \end{pmatrix}$$

2.4.3 Cho dòng 3 trong ma trận hệ số kỹ thuật của mô hình cân đối liên ngành gồm 4 ngành sản xuất: $(0,2 \quad 0,1 \quad 0,2 \quad 0,3)$. Hãy xác định số tiền mà ngành 4 phải trả cho ngành 3 để mua sản phẩm ngành 3 làm nguyên liệu đầu vào của sản xuất, biết tổng giá trị sản phẩm của 4 ngành là 200 nghìn tỷ VNĐ

2.4.2 Mô hình cân bằng thị trường n hàng hóa có liên quan

Bài toán 2. Giả sử nghiên cứu thị trường gồm n hàng hóa có liên quan. Khi giá của một mặt hàng thứ i nào đó thay đổi thì nó ảnh hưởng tới lượng cung (Q_{S_i}) và lượng cầu (Q_{D_i}) và ảnh hưởng cả tới giá và lượng cung và cầu của các mặt hàng còn lại.Mô hình cân bằng thị trường n hàng hóa có liên quan được xác định bởi

$$Q_{S_i} = Q_{D_i}, i = 1, 2, \ldots n$$

- Hàm cung $Q_{S_i} = S_i(P_1, P_2, \ldots, P_n)$
- Hàm cầu $Q_{D_i} = D_i(P_1, P_2, \ldots, P_n)$
- Giá hàng hóa thứ i là $P_i, i = 1, 2, \ldots, n$
- Nếu các giả thuyết Q_{S_i} và Q_{D_i} có dạng tuyến tính, thì giải hệ phương trình, ta có

1. Bộ giá cân bằng thị trường $\overline{P} = (\overline{P_1}, \overline{P_2}, \ldots, \overline{P_n})$.
2. Bộ lượng cân bằng thị trường $\overline{Q} = (\overline{Q_1}, \overline{Q_2}, \ldots, \overline{Q_n})$.

Ví dụ 2.4.3 Giả sử hàm cung và hàm cầu của thị trường hai loại hàng hóa có dạng

$$Q_{S_1} = -2 + 3P_1; Q_{S_2} = -1 + 2P_2; Q_{D_1} = 8 - 2P_1 + P_2; Q_{D_2} = 11 + P_1 - P_2$$

Hãy xác lập hệ phương trình tuyến tính với các ẩn P_1, P_2 khi thị trường cân bằng.

Ví dụ 2.4.4 Giả sử thị trường gồm hai loại hàng hoas1 và 2, có các hàm cung và cầu

$$Q_{S_1} = -2 + 2P_1; Q_{S_2} = -5 + 3P_1; Q_{D_1} = 1 - P_1 + P_2; Q_{D_2} = 2 + 5P_1 - P_2$$

Bằng phương pháp ma trận nghịch đảo, hãy xác định bộ giá và lượng cân bằng thị trường của hai hàng hóa nói trên.

2.4.3 Mô hình cân bằng thu nhập quốc dân

Bài toán 3. Xét mô hình cân bằng thu nhập quôc sdaan ở dạng đơn giản, với Y là tổng thu nhập quốc dân, G là chi tiêu chính phủ, I là đầu tư và C là tiêu dùng của các hộ gia đình.

- Chi tiêu chính phủ và đầu tư là cố định $G = G_0, I = I_0$.
- Chi tiêu gia đình có dạng tuyến tính $C = aY + b, 0 < a < 1, b > 0$

Mô hình. Mô hình thu nhập quốc dân có dạng hệ phương trình tuyến tính, với 2 ẩn Y và C

$$\begin{cases} Y = G_0 + I_0 + C \\ C = aY + b \end{cases}$$

hay

$$\begin{cases} Y - C = G_0 + I_0 \\ C - aY = b \end{cases}$$

- Hệ cho nghiệm

$$\overline{Y} = \frac{G_0 + I_0 + b}{1 - a}; \quad \overline{C} = \frac{b + a(G_0 + I_0)}{1 - a}$$

- Mô hình có tính tới chịu thuế với thuế suất $t\%$. Thu nhập sau thuế

$$Y_d = Y - tY = (1 - t)Y$$

- Hàm chi tiêu có dạng

$$C = aY_d + b = a(1 - t)Y + b$$

- Nếu xét thêm yếu tố xuất khẩu(X) và nhập khẩu (N)

$$\begin{cases} Y = G_0 + I_0 + C + X - N \\ C = a(1 - t)Y + b \end{cases}$$

Ví dụ 2.4.5 Giả sử

$$C = 0,80Y_d + 250; I = I_0; G = G_0; Y_d = (1-t)Y$$

1. Sử dụng quy tắc Cramer, hãy xác định mức thu nhập quốc dân và chi tiêu cân bằng.
2. Tính mức thu nhập quốc dân và chi tiêu cân bằng với $I_0 = 150, G_0 = 500, t = 15\%$

Bài tập

2.4.4 Xét mô hình cân bằng $Y = C + I_0 + G_0 + X_0 - N$ với

$$C = \alpha(1-t)Y, (0 < \alpha < 1); N = \beta(1-t)Y, (0 < \beta < 1)$$

1. Hãy xác định mức thu nhập quốc dân và chi tiêu ở trạng thái cân bằng $\overline{Y}, \overline{C}$ theo công thức Cramer.
2. Tính mức thu nhập quốc dân và chi tiêu cân bằng với $I_0 = 250, G_0 = 400, t = 10\%, X_0 = 100, \alpha = 0,85; \beta = 0,1$

2.4.5 Xét thị trường hai loại hàng hóa với hàm cung và hàm cầu

$$Q_{S_1} = -1 + P_1; Q_{S_2} = P_2; Q_{D_1} = 20 - 2P_1 - P_2; Q_{D_2} = 40 - 2P_2 - P_1$$

Hãy xác định bộ giá và lượng cân bằng thị trường của hai hàng hóa đó bằng quy tắc Cramer.

2.4.6 Xét thị trường hai loại hàng hóa với hàm cung và hàm cầu

$$Q_{S_1} = 2P_1; Q_{S_2} = -10 + 2P_2; Q_{D_1} = 20 - 2P_1 + P_2; Q_{D_2} = 40 - 2P_2 + P_1$$

Hãy xác định bộ giá và lượng cân bằng thị trường của hai hàng hóa đó bằng phương pháp ma trận.

2.4.7 Xét thị trường hai loại hàng hóa với hàm cung và hàm cầu

$$Q_{S_1} = -20+2P_1; Q_{S_2} = -10+P_2; Q_{D_1} = 100-5P_1-P_2; Q_{D_2} = 80-4P_2-2P_1$$

Hãy xác định bộ giá và lượng cân bằng thị trường của hai hàng hóa đó bằng phương pháp ma trận.

2.4.8 Xét mô hình cân bằng thu nhập quốc dân

$$\begin{cases} Y = G_0 + I_0 + C \\ C = 0,4Y + 30 \end{cases}$$

Hãy xác định mức thu nhập và chi tiêu quốc dân ở trạng thái cân bằng bằng quy tắc Cramer, biết $I_0 = 200, G_0 = 500$.

2.4.9 Xét mô hình

$$\begin{cases} Y = G_0 + I_0 + C \\ C = 0,8Y_d \\ Y_d = (1-t)Y \end{cases}$$

Hãy xác định mức thu nhập và chi tiêu quốc dân ở trạng thái cân bằng bằng quy tắc Cramer, biết $I_0 = 200, G_0 = 500, t = 0,1$.

2.4.10 Xét mô hình

$$\begin{cases} Y = G_0 + I_0 + C + X_0 - N \\ C = 0,85Y_d \\ Y_d = (1-t)Y \\ N = 0,1Y_d \end{cases}$$

1. Hãy xác định mức thu nhập quốc dân $\overline{(Y)}$ và chi tiêu quốc dân $\overline{(C)}$ ở trạng thái cân bằng bằng quy tắc Cramer.
2. Tính $\overline{(Y)}$ và $\overline{(C)}$ khi $I_0 = 200, G_0 = 500, t = 0,1, X_0 = 100$.

Chương 3

Giải tích toán học

3.1 Phép tính vi tích phân hàm một biến

3.1.1 Hàm số.

Cho tập $X \subset \mathbb{R}$, ánh xạ $f : X \to \mathbb{R}$ là một hàm số. Tập X được gọi là tập xác định của f, ký hiệu $D(f)$ và tập $\{y : \ y = f(x), x \in X\}$ được gọi là miền giá trị của hàm số f.

• Hai hàm số f và g được gọi là bằng nhau trên tập X nếu $f(x) = g(x)$, với mọi $x \in X$.

• Hàm số f được gọi là lớn hơn hàm số g trên X nếu $f(x) > g(x)$, với mọi $x \in X$.

• Hàm số f được gọi là bị chặn trên tập X nếu tồn tại số dương K sao cho $| f(x) | \leq K$, với mọi $x \in X$.

• Hàm số $f(x)$ đơn điệu tăng (hoặc đơn điệu giảm) trên X nếu với mọi $x_1, x_2 \in X$ mà $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) \leq f(x_2)$ (hoặc $f(x_1) \geq f(x_2)$).

• Nếu với mọi $x_1, x_2 \in D$ mà $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) < f(x_2)$ (hoặc $f(x_1) > f(x_2)$) thì hàm số $f(x)$ đơn điệu tăng (hoặc giảm) ngặt trên X.

Ví dụ 3.1.1 Hàm số $y = x^3$ đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}$, hàm số $y = e^{-3x}$ đơn điệu giảm trên $\mathbb{R}$.

Hàm số hợp. Cho các hàm số $f : T \to X$, và $g : X \to \mathbb{R}$. Khi đó hàm số $h : T \to \mathbb{R}$ được xác định như sau $h(t) = g(f(t))$, gọi là hàm số hợp của hai hàm số f và g. Kí hiệu $h = g \circ f$.

Ví dụ 3.1.2 Hợp của hai hàm số $t \mapsto x(t) = \sin(t)$ và $x \mapsto y = x^2$ là

hàm số $y = x^2 = \sin^2(t)$.

Hàm số ngược. Cho hàm số $f : D \to T$ xác định trên tập D và có miền giá trị là T. Khi đó hàm số $g : T \to D$ được gọi là hàm số ngược của hàm số f nếu $g \circ f(x) = x$, với mọi $x \in D$ và $f \circ g(t) = t$, với mọi $t \in T$.

- Hàm số $y = 2x - 3$ có hàm số ngược là $y = \dfrac{x+3}{2}$.

- Nếu hàm số f tăng (hoặc giảm) ngặt trên miền X thì nó có hàm số ngược. Hơn nữa hàm số ngược của nó cũng tăng (hoặc giảm) ngặt.

- Hàm số $y = \sin(x)$ tăng ngặt trên $[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}]$, nên trên đoạn này tồn tại hàm số ngược $y = \arcsin(x)$ có miền xác định là $[-1, 1]$ và tập giá trị là $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

- Hàm số ngược của hàm số $y = \cos(x)$ trên $[0, \pi]$, là $y = \arccos(x)$. Hàm số này có miền xác định $[-1, 1]$ và tập giá trị là $[0, \pi]$.

- Hàm số ngược của hàm số $y = \tan(x)$ trên $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, là $y = \arctan(x)$. Hàm số này có miền xác định $(-\infty, +\infty)$ và tập giá trị là $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Bài tập.

3.1.1 Cho hàm số $f(x) = a^x + a^{-x}, 0 < a \neq 1$. Chứng minh rằng

$$f(x+y) + f(x-y) = f(x)f(y).$$

3.1.2 Cho $f(x) = \sin(x)$ và $g(x) = 2^x$. Tính $f \circ g(x), g \circ f(x)$. Tìm miền xác định của các hàm số sau

- $y = \sqrt{x^2 + 2x - 3}$,
- $y = \arccos(1 - x^2)$
- $y = (x-2)\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$,
- $y = \sqrt{\sin(\sqrt{x})}$,
- $y = \log(\arcsin(2x))$.

3.1.3 Tìm hàm số $f(x)$ có dạng $f(x) = ax + b$, biết rằng $f(0) = -2$ và $f(3) = 5$.

3.1.4 Giả sử hàm số $f(u)$ xác định khi $0 < u < 1$. Tìm miền xác định của các hàm số $f(\sin(x)), f(\ln(x))$.

3.1.5 Tìm hàm số ngược của các hàm số sau

- $y = 2x + 3$;
- $y = x^2$, với $x \in (-\infty, 0)$
- $y = \dfrac{1+x}{1-x}$.

3.1.2 Giới hạn của hàm số.

Cho hàm số $f(x)$ xác định trong khoảng (a, b). Hàm số $f(x)$ có giới hạn là L khi x dần tới $x_0, x_0 \in (a, b)$, ký hiệu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ nếu với bất kì dãy $(x_n), x_n \neq x_0, x_n \to x_0$ thì $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = L$.

Ví dụ 3.1.5

- $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1}(x + 1) = 2$.

Giới hạn một phía. Xét giới hạn của $f(x)$ khi $x \to x_0$, với điều kiện $x < x_0$ hoặc $x > x_0$. Ta định nghĩa

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x),$$

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x).$$

là giới hạn bên trái và giới hạn bên phải của hàm $f(x)$ tại x_0.

Ví dụ 3.1.6 Cho hàm số $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$. Hàm số này không xác định tại $x = 0$, và $f(x) = -1$ với $x < 0$ và $f(x) = 1$ với $x > 0$. Do đó

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1, \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1.$$

- Điều kiện cần và đủ để

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

tồn tại là $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ đều tồn tại và

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L.$$

Giới hạn của hàm số khi x dần tới vô cực. Hàm số $f(x)$ có giới hạn là L khi x dần tới dương vô cùng và viết

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

nếu với bất kì $\epsilon > 0$, tồn tại $N > 0$ sao cho khi $x > N$ thì $| f(x) - L | < \epsilon$.

• Hàm số $f(x)$ có giới hạn là L khi x dần tới âm vô cùng và viết

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

nếu với bất kì $\epsilon > 0$, tồn tại $N > 0$ sao cho khi $x < -N$ thì $| f(x) - L | < \epsilon$.

• Nếu $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = L$, ta nói hàm số có giới hạn khi x dần ra vô cực, ta viết

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L.$$

Ví dụ 3.1.7

- $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$,
- $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$.

Các tính chất của giới hạn. Cho $f(x)$ và $g(x)$ đều có giới hạn khi $x \to x_0$. Khi đó, ta có

1. $\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x)$,
2. $\lim_{x \to x_0} (f(x)g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) . \lim_{x \to x_0} g(x)$,
3. $\lim_{x \to x_0} (k.f(x)) = k . \lim_{x \to x_0} f(x)$, $k \in \mathbb{R}$.

Bài tập. Tìm các giới hạn

3.1.6 $\lim_{n \to \infty} \left[\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \right]$,

3.1.7 $\lim_{n \to \infty} \frac{n^4 + n - 3}{n^4 + n^2}$, 3) $\lim_{n \to \infty} \frac{2^n + 3^n}{3^n + 2}$.

3.1.8 $\lim_{x \to 2} \frac{(x^2 - x - 2)^{20}}{(x^3 - 12x + 6)^{10}}$; 2) $\lim_{x \to 1} \frac{x^4 - 2x + 1}{x^3 - 2x + 1}$.

3.1.9 $\lim_{x \to 0} \frac{\cos 2x - 1}{x^2}$, 2) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt[3]{1 + x}}{2x}$,

3.1.10 $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^3 - x - 1}{2x^3 + x^2 + 3} \right)^5$.

3.1.11 $\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{1 - \cos x}$.

3.1.3 Tính liên tục của hàm số

Hàm liên tục. Hàm số $f(x)$ được gọi là liên tục tại $x_0 \in (a,b)$ nếu

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{3.1}$$

• Chú ý rằng, điểm x_0 trong định nghĩa trên nhất thiết phải thuộc miền xác định, tức là $f(x)$ phải xác định tại x_0.

• Nếu hàm số $f(x)$ liên tục tại mọi $x \in (a,b)$ thì ta nói hàm $f(x)$ liên tục trên (a,b).

Tính chất. Cho $f(x), g(x)$ là các hàm liên tục trên (a,b). Khi đó

1. $f(x) \pm g(x)$ liên tục trong (a,b),
2. $f(x).g(x)$ liên tục trên (a,b),
3. $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ liên tục trong (a,b) trừ những điểm làm $g(x)$ triệt tiêu.

Điểm gián đoạn của hàm số. Hàm số $f(x)$ được gọi là gián đoạn tại điểm x_0, nếu hàm $f(x)$ không liên tục tại x_0. Tức là

1. Hàm số không xác định tại x_0, hoặc
2. Hàm số xác định tại x_0, nhưng $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

Định lí giá trị trung bình.

• Hàm số $f(x)$ liên tục trên (a,b) và có $\alpha, \beta \in (a,b)(\alpha < \beta)$ sao cho $f(\alpha)f(\beta) < 0$, thì tồn tại $c \in (\alpha,\beta)$ để cho $f(c) = 0$.

Ví dụ 3.1.8 Phương trình $x^8 - x^3 + 2x - 1 = 0$ có nghiệm thuộc (0,1) hay không?.

Bài tập.

3.1.12 Xét sự liên tục của các hàm số $f(x) = \mid x - 1 \mid$

3.1.13 Chứng minh rằng phương trình sau có nghiệm $x^5 + 7x^4 - 3x^2 + x + 2 = 0$.

3.1.14 Chứng minh rằng phương trình sau có nghiệm $3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x - 20 = 0$,

3.1.15 Chứng minh rằng phương trình sau có nghiệm $x^5 - x - 2 = 0$ có nghiệm thuộc $[1, 2]$ và $x > \sqrt[9]{8}$.

3.1.4 Đạo hàm

Định nghĩa. Hàm số $f(x)$ khả vi tại điểm $c \in (a, b)$ nếu tồn tại giới hạn

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = A. \tag{3.2}$$

• Số A được gọi là đạo hàm của hàm số $f(x)$ tại điểm $x = c$, kí hiệu $f'(c)$.

• Nếu hàm số $f(x)$ khả vi tại mọi điểm $x \in (a, b)$ thì ta nói rằng $f(x)$ khả vi trong khoảng (a, b).

Nhận xét. Nếu đặt $x - c = \Delta x$ thì biểu thức định nghĩa đạo hàm trở thành

$$f'(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}.$$

Các qui tắc tính đạo hàm. Giả sử $f(x)$ và $g(x)$ khả vi tại $x \in (a, b)$. Khi đó

- $f(x) \pm g(x), f(x)g(x)$ cũng khả vi tại x và
- $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$,
- $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$, đặc biệt $(cf(x))' = cf'(x)$.
- Nếu $g(x) \neq 0$ thì $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ cũng khả vi tại x và $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

Đạo hàm của hàm hợp. Giả sử hàm số $y = f(u)$ khả vi theo u và hàm $u = g(x)$ khả vi theo x. Khi đó, hàm số hợp $y = f(g(x)$ khả vi theo x và

$$(f(g(x)))' = f'_u(g(x).g'(x)$$

trong đó f'_u chỉ đạo hàm theo biến u của hàm $f(u)$.

• Cho hàm số $f(x)$ khả vi tại x và có đạo hàm $f'(x) \neq 0$. Giả sử $f(x)$ có hàm số ngược $x = g(y)$. Khi đó $g(y)$ khả vi tại y và đạo hàm $g'_y(y)$ thỏa

mãn hệ thức

$$g'_y(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

3.1.5 Vi phân

Định nghĩa. Từ định nghĩa đạo hàm của hàm số

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

Do đó, với Δx đủ nhỏ thì $\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \approx f'(x)$ hay

$$f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x.$$

• Tích số $f'(x)\Delta x$ được gọi là vi phân của $f(x)$, lấy tại điểm x, kí hiệu df, tức là

$$df = f'(x)\Delta x.$$

• Nếu lấy $f(x) = x$ thì từ công thức trên ta có $dx = \Delta x$. Do vậy công thức vi phân có thể viết lại có dạng

$$df = f'(x)dx.$$

Đạo hàm cấp cao. Giả sử hàm số $f(x)$ khả vi trong (a, b). Khi đó, ta có đạo hàm $f'(x)$ của hàm số $f(x)$ cũng là một hàm số xác định trên (a, b). Nếu $f'(x)$ khả vi trong (a, b) thì ta lấy đạo hàm $(f'(x))'$ và được gọi là đạo hàm cấp 2, kí hiệu $f''(x)$. Như vậy

$$f''(x) = (f'(x))'.$$

Bằng cách tương tự ta có thể định nghĩa đạo hàm cấp n của hàm $f(x)$, kí hiệu $f^{(n)}(x)$ chính là đạo hàm của hàm số $f^{(n-1)}(x)$ (đạo hàm cấp $(n-1)$ của $f(x)$).

3.1.6 Ứng dụng của đạo hàm

1. **Khảo sát chiều biến thiên của hàm số.**

2. Tìm giá trị lớn nhất và bé nhất của hàm số trong một khoảng.

3. **Qui tắc De L'Hospital.** Khử dạng vô định $\frac{0}{0}$ và $\frac{\infty}{\infty}$

• Giả sử các hàm số $f(x)$ và $g(x)$ khả vi trong lân cận a và $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ và $g'(x) \neq 0$ trong lân cận a. Khi đó, nếu $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ tồn tại thì

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Bài tập. Tính đạo hàm của các hàm số sau

3.1.16 $y = x^{x^x}$

3.1.17 Tìm vi phân của các hàm số

• $y = (a^2 - x^2)^5$

• $y = \sqrt{1 + x^2}$.

3.1.18 Cho $y = e^x \sin x$. Chứng minh rằng $y'' - 2y' + 2y = 0$.

3.1.19 Sử dụng qui tắc De L'Hospital để tính các giới hạn sau

• $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\sin x \cos x}$.

• $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)}$, e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos 2x}{x \sin x}$.

3.1.20 Tìm giá trị lớn nhất và giá trị bé nhất của hàm số $y = x^2 \ln x$ trên $[1, e]$.

3.1.21 Chứng minh các bất đẳng thức sau

• $1 + 2\ln x \leq x^2$, với $x > 0$

• $1 + x + \dfrac{x^2}{2} < e^x < 1 + x + \dfrac{x^2}{2}e^x$, với mọi $x > 0$.

3.1.7 Tích phân bất định

Nguyên hàm. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $(a, b) \subset \mathbb{R}$. Hàm số $F(x)$ xác định trên (a, b) được gọi là một nguyên hàm của $f(x)$ trên (a, b) nếu $F(x)$ khả vi trên (a, b) và $F'(x) = f(x)$.

• $\dfrac{x^5}{5}$ là một nguyên hàm của x^4 vì $\left(\dfrac{x^5}{5}\right)' = x^4$, với mọi $x \in \mathbb{R}$.

• $\dfrac{x^5}{5} + C$, trong đó C là một hằng số bất kỳ, là một nguyên hàm của x^4

vì $\left(\frac{x^5}{5}+C\right)'=x^4$, với mọi $x\in\mathbb{R}$.

• Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên (a,b) thì tập tất cả các nguyên hàm của $f(x)$ trên (a,b) là $\{F(x)+C, C\in\mathbb{R}\}$.

Tích phân bất định. Tập tất cả các nguyên hàm của hàm $f(x)$ trên khoảng (a,b) được gọi là tích phân bất định của $f(x)$ trên (a,b), ký hiệu là

$$\int f(x)dx.$$

Như vậy

$$\int f(x)dx = F(x)+C, \text{với } C \text{ là hằng số bất kỳ.}$$

3.1.8 Các tính chất cơ bản của tích phân bất định

1. Nếu f có nguyên hàm trên khoảng (a,b) thì

   • $\left(\int f(x)dx\right)'=f(x)$,

   • $d\left(\int f(x)dx\right)=f(x)dx$,

   • $\int f(x)dx=\int f(u)du=\int f(t)dt=\cdots$, miễn sao $x,u,t,\cdots$ đều biến thiên trên (a,b).

2. Nếu $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ và α là hằng số tuỳ ý khác 0 thì

$$\int \alpha f(x)dx=\alpha\int f(x)dx=\alpha F(x)+C, (\text{với } C \text{ là hằng số bất kỳ}).$$

3. Nếu $F(x)$ và $G(x)$ lần lượt là nguyên hàm của $f(x)$ và $g(x)$ trên (a,b) thì

$$\int (f(x)+g(x))dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx=F(x)+G(x)+C.$$

3.1.9 Các phương pháp tính tích phân bất định

1. Phương pháp đổi biến số.

2. Phương pháp tính tích phân từng phần.

3. Tích phân các hàm hữu tỉ.

4. Tích phân các hàm lượng giác.

5. Tích phân các hàm vô tỉ.

Bài tập.

3.1.22 Tính tích phân sau

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx$$

3.1.23 Tính tích phân sau

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx$$

3.1.24 Tính tích phân sau

$$\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx$$

3.1.25 Tính tích phân sau

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}dx$$

3.1.26 Tính tích phân sau

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$$

3.1.27 Tính tích phân sau

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$$

3.1.28 Tính tích phân sau

$$\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx$$

3.1.29 Tính tích phân sau

$$\int \sin x \ln(\mathrm{tg}(x))dx$$

3.1.30 Tính tích phân sau

$$\int \cos(\ln x)dx$$

3.1.31 Tính tích phân sau đây

$$\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}dx$$

3.1.32 Tính tích phân sau

$$\int \frac{x^2+1}{x^3-5x^2+6x}dx$$

3.1.33 Tính tích phân sau

$$\int \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}\frac{dx}{x}$$

3.1.34 Tính tích phân sau

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$$

3.1.35 Tính tích phân sau

$$\int \sin^3 x \cos^2 x dx$$

3.1.36 Tính tích phân sau

$$\cos^6 x dx$$

3.1.37 Tính tích phân sau

$$\int \sin x \sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{3}$$

3.1.38 Tính tích phân sau

$$\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$$

3.1.10 Tích phân xác định

Định nghĩa Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $[a,b]$. Chia đoạn $[a,b]$ thành n đoạn nhỏ tuỳ ý bởi các điểm chia $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$. Mỗi phép chia như thế gọi là một phân hoạch đoạn $[a,b]$.

Trên mỗi đoạn $[x_{i-1}, x_i]$, ta lấy tuỳ ý một điểm $\xi_i, i = \overline{1,n}$. Lập tổng

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i).\Delta x_i, \text{ với } \Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$

Cho số điểm chia tăng vô hạn sao cho $d = \max_i \Delta x_i \to 0$. Nếu trong quá trình đó I_n dần tới một giới hạn xác định I không phụ thuộc vào cách phân hoạch $[a,b]$ và cách lấy điểm ξ_i thì ta nói rằng hàm $f(x)$ khả tích trên $[a,b]$ và gọi I là tích phân xác định của hàm $f(x)$ trên $[a,b]$. Ta kí hiệu

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ d\to 0}} I_n = \lim_{\substack{n\to\infty \\ d\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i).\Delta x_i.$$

Các tính chất cơ bản của tích phân xác định. Giả sử các hàm $f(x)$ và $g(x)$ khả tích trên $[a,b]$. Ta có

1) $\int_a^b k.f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx, k$ là hằng số,

2) $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$,

3) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, với $c \in [a,b]$,

4) Nếu $f(x) = C$ (hằng số) thì $\int_a^b Cdx = C(b-a)$,

5) Nếu $f(x) \le g(x)$ trên $[a,b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$.

6) Nếu m, M thoả mãn $m \le f(x) \le M, \forall x \in [a,b]$ thì

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

Công thức Newton- Leibnitz. Giả sử $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a,b]$ và F là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $[a,b]$. Khi đó

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) := F(x)\Big|_a^b.$$

Các phương pháp tính tích phân xác định.

1. Phương pháp đổi biến số.

2. Tích phân từng phần.

$$\int_a^b udv = (uv)\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$$

Bài tập

3.1.39 Tính các tích phân xác định sau đây

- $\int_{-1}^{1} \frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}$,
- $\int f(x)dx$ nếu $f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ khi } 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x \text{ khi } 1 \leq x \leq 2, \end{cases}$
- $\int_0^1 \frac{\arcsin x dx}{\sqrt{x(1-x)}}$,
- $\int_{-1}^{1} \frac{xdx}{x^2+x+1}$,
- $\int_0^1 x^{15}\sqrt{1+3x^8}dx$,
- $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$,
- $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{tg}^4 x dx$,

3.2 Phép tính vi tích phân hàm hai biến

3.2.1 Khái niệm hàm hai biến

Khái niệm. Giả sử $D \subseteq \Re^2 = \Re \times \Re$. Ánh xạ $f : \Re^2 \longmapsto \Re$, ứng mỗi cặp số thực $(x, y) \in D$ một số thực z, ký hiệu $z = f(x, y)$, được gọi là hàm hai biến số thực. Ký hiệu

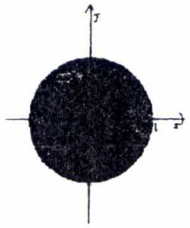
$$f : (x, y) \longmapsto z = f(x, y)$$

• D là một tập hợp trên mặt phẳng $\Re^2$. D được gọi là miền xác định của hàm số f

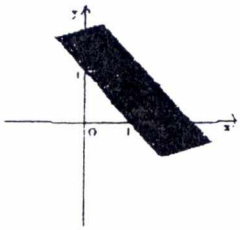
• Hai biến x và y được gọi là hai biến độc lập, z là biến phụ thuộc.

• Tập hợp $f(D) = \{z \in \Re : z = f(x, y), (x, y) \in D\} \subseteq \Re$ được gọi là miền giá trị của hàm số f

•Hàm số $z = \sqrt{1 - x^2 + y^2}$ có miền xác định $D = \{(x, y) \in \Re^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$– hình tròn tâm (0,0) bán kính 1



• Hàm số $z = \ln(x + y - 1)$ có miền xác định $D = \{(x, y) \in \Re^2 : x + y > 1\}$ – nửa mặt phẳng mở ở phía trên đường thẳng $x + y - 1 = 0$



Giới hạn của dãy các điểm. Giả sử dãy các điểm $z_n = (x_n, y_n) \in \Re^2$ và $z_0 = (x_0, y_0) \in \Re^2$. Ta nói dãy $z_n = (x_n, y_n)$ hội tụ tới điểm $z_0 = (x_0, y_0)$, khi $n \to \infty$, nếu

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} = 0$$

• Dãy các điểm $z_n = (x_n, y_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ và $z_0 = (x_0, y_0) = (0, 0) \in \Re^2$. Dễ thấy dãy $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ hội tụ tới điểm $z_0 = (0, 0)$, khi $n \to \infty$, vì

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2}}{n} = 0$$

3.2.2 Giới hạn của hàm hai biến số

Định nghĩa. Giả sử hàm số $z = f(x, y)$ xác định trong miền D chứa điểm $z_0 = (x_0, y_0)$. Số thực L là giới hạn của hàm số $z = f(x, y)$, khi $(x, y) \to (x_0, y_0)$, nếu

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$$

Các định nghĩa tương đương. Giả sử hàm số $z = f(x, y)$ xác định trong miền D chứa điểm $z_0 = (x_0, y_0)$.

• Số thực L là giới hạn của hàm số $z = f(x, y)$, khi $(x, y) \to (x_0, y_0)$, nếu

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta, \mid f(x, y) - L \mid < \epsilon$$

• Giả sử hàm số $z = f(x, y)$ xác định trong miền D chứa điểm $z_0 = (x_0, y_0)$. Giả sử dãy điểm $(x_n, y_n) \in D$. Số thực L là giới hạn của hàm số $z = f(x, y)$, khi $(x, y) \to (x_0, y_0)$, nếu với mọi dãy (x_n, y_n) hội tụ về điểm (x_0, y_0) khi $n \to \infty$, ta có

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = L$$

Chú ý:

- Giới hạn của một dãy, nếu tồn tại thì duy nhất
- Giới hạn của một hàm hai biến $f(x, y)$, nếu tồn tại thì duy nhất
- Giới hạn kép khác giới hạn lặp

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) \neq \lim_{x\to x_0} \lim_{y\to y_0} f(x, y)$$

Ví dụ 3.2.1

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

Ví dụ 3.2.2 Không tồn tại

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

3.2.3 Tính liên tục của hàm hai biến

Liên tục. Hàm hai biến $z = f(x, y)$ liên tục tại điểm (x_0, y_0), nếu

- Tồn tại giới hạn $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$
- Có đẳng thức $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$
- Nếu hàm hai biến $z = f(x, y)$ liên tục tại điểm (x_0, y_0), thì điểm (x_0, y_0) là điểm liên tục của hàm số $z = f(x, y)$
- Nếu không tồn tại giới hạn $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$, thì điểm (x_0, y_0) là điểm gián đoạn loại 2
- Nếu $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) \neq f(x_0, y_0)$, thì điểm (x_0, y_0) là điểm gián đoạn loại 1

Ví dụ 3.2.3 Điểm (0,0) là điểm gián đoạn loại 2 của hàm $z = \frac{xy}{x^2+y^2}$

Ví dụ 3.2.4 Khảo sát sự liên tục của hàm hai biến $z = f(x, y)$

$$z = f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{nếu } (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & \text{nếu } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

3.2.4 Đạo hàm riêng

Định nghĩa. Giả sử hàm hai biến $z = f(x, y)$ xác định trong miền $D \subseteq \Re^2$. Giả sử điểm $(x_0, y_0) \in D$. Đạo hàm riêng (theo biến x) của hàm số f(x,y) tại điểm (x_0, y_0) là giới hạn

$$\lim_{\Delta x \downarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f_x^{'}(x_0, y_0)$$

- Tồn tại giới hạn hữu hạn $\frac{\Delta f}{\Delta x} \neq \pm\infty$
- Phân biệt sự khác nhau giữa đạo hàm riêng $\frac{\partial f}{\partial x}$ và đạo hàm $\frac{df}{dx}$
- Giả sử hàm hai biến $z = f(x, y)$ xác định trong miền $D \subseteq \Re^2$. Giả sử điểm $(x_0, y_0) \in D$. Đạo hàm riêng (theo biến y) của hàm số f(x,y) tại điểm (x_0, y_0) là giới hạn

$$\lim_{\Delta y \downarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f_y^{'}(x_0, y_0)$$

- Tồn tại giới hạn hữu hạn $\frac{\Delta f}{\Delta y} \neq \pm\infty$

Ví dụ 3.2.5 Giả sử $z = f(x, y) = x^5 + 4x^3y^2 - 2xy + 1$. Tính các đạo hàm riêng theo các biến x và y

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 5x^4 + 12x^2y^2 - 2y; \frac{\partial f}{\partial y} = 8x^3y - 2x$$

Đạo hàm riêng cấp cao theo biến x. Giả sử hàm hai biến $z = f(x, y)$ xác định trong miền $D \subseteq \Re^2$. Giả sử điểm $(x_0, y_0) \in D$. Đạo hàm riêng cấp k, $k \geq 1$ (theo biến x) của hàm số f(x,y) tại điểm (x_0, y_0) là

$$\frac{\partial^k f\left(x_0, y_0\right)}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{k-1} f\left(x_0, y_0\right)}{\partial x^{k-1}}\right) = f_{x^k}^{(k)}\left(x_0, y_0\right)$$

- Lấy đạo hàm theo biến x k lần liên tiếp

Đạo hàm riêng cấp cao theo biến y. Giả sử hàm hai biến $z = f(x, y)$ xác định trong miền $D \subseteq \Re^2$. Giả sử điểm $(x_0, y_0) \in D$. Đạo hàm riêng cấp k, $k \geq 1$ (theo biến y) của hàm số f(x,y) tại điểm (x_0, y_0) là

$$\frac{\partial^k f\Big(x_0, y_0\Big)}{\partial y^k} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^{k-1} f\Big(x_0, y_0\Big)}{\partial y^{k-1}}\right) = f_{y^k}^{(k)}\Big(x_0, y_0\Big)$$

- Lấy đạo hàm theo biến y k lần liên tiếp

Đạo hàm riêng cấp 2 hỗn hợp theo biến x và y. Giả sử hàm hai biến $z = f(x, y)$ xác định trong miền $D \subseteq \Re^2$. Giả sử điểm $(x_0, y_0) \in D$. Đạo hàm riêng cấp 2 hỗn hợp, (theo hai biến x và y) của hàm số f(x,y) tại điểm (x_0, y_0) là

$$\frac{\partial^2 f\Big(x_0, y_0\Big)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f\Big(x_0, y_0\Big)}{\partial y}\right) = f_{xy}^{(2)}\Big(x_0, y_0\Big)$$

Nói chung

$$f_{xy}^{(2)}\Big(x_0, y_0\Big) \neq f_{yx}^{(2)}\Big(x_0, y_0\Big)$$

Định lý Schwarz. Giả sử hàm hai biến $z = f(x, y)$ xác định trong miền $D \subseteq \Re^2$. Giả sử điểm $(x_0, y_0) \in D$. Nếu hàm số $z = f(x, y)$ có đạo hàm riêng cấp 2 hỗn hợp liên tục, (theo hai biến x và y) tại điểm (x_0, y_0), thì

$$f_{xy}^{(2)}\Big(x_0, y_0\Big) = f_{yx}^{(2)}\Big(x_0, y_0\Big)$$

Ví dụ 3.2.6 Giả sử $z = f(x, y) = x^3y^2 + 2x^2y + 3x + 4$. Các đạo hàm riêng cấp hai hỗn hợp theo các biến x và y liên tục (trong $\Re^2$), nên

$$f_{xy}^{(2)} = f_{yx}^{(2)} = 6x^2y + 4x$$

- đạo hàm riêng theo x $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^2 + 4xy + 3$
- đạo hàm riêng theo y $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3y + 2x^2$
- đạo hàm riêng cấp 2 hỗn hợp theo x và y $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6x^2y + 4x$
- đạo hàm riêng cấp 2 hỗn hợp theo y và x $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 6x^2y + 4x$

Vi phân toàn phần. Giả sử hàm hai biến $z = f(x, y)$ xác định trong miền $D \subseteq \Re^2$. Giả sử điểm $(x_0, y_0), (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in D$. Nếu số gia $\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ có dạng

$$\Delta f(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y + o(\Delta x) + o(\Delta y)$$

thì hàm số $z = f(x, y)$ khả vi tại điểm (x_0, y_0) và biểu thức $A\Delta x + B\Delta y$ là vi phân toàn phần của hàm số $f(x, y)$, ký hiệu $df(x_0, y_0)$.

Chú ý:

- Vi phân toàn phần

$$df(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y$$

- Hai hằng số A và B không phụ thuộc vào Δx và Δy
- Hai đại lượng $o(\Delta x)$ và $o(\Delta y)$ là các vô cùng bé bậc cao hơn Δx và Δy khi $\Delta x \to 0$ và $\Delta y \to 0$, tức là khi $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$, ta có

$$\frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \to 0; \frac{o(\Delta y)}{\Delta y} \to 0$$

Tính chất:

- Nếu hàm số $z = f(x, y)$ khả vi tại điểm (x_0, y_0), thì nó liên tục tại đó, vì

$$\Delta f(x_0, y_0) \to 0, \quad \text{nếu} \quad (\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$$

- Điều ngược lại không đúng
- Nếu hàm số $z = f(x, y)$ khả vi tại điểm (x_0, y_0), thì tồn tại đạo hàm riêng $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$ và $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$. (so sánh với trường hợp hàm một biến)
- Ngược lại không đúng, nếu tồn tại đạo hàm riêng $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$ và $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$, chưa chắc hàm số $z = f(x, y)$ khả vi tại điểm (x_0, y_0).

Ví dụ 3.2.7 Hàm hai biến

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{nếu} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{nếu} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- Theo định nghĩa, đạo hàm riêng theo x tại điểm $(0, 0)$ là

$$\frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0)}{\Delta x} = 0$$

• Tương tự, đạo hàm riêng theo y tại điểm $(0,0)$ là

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0,\Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0,\Delta y)}{\Delta y} = 0$$

• Các đạo hàm riêng $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = 0$ và $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} = 0$, nhưng hàm $f(xy)$ không khả vi tại điểm (x_0, y_0) vì nó không liên tục tại điểm (x_0, y_0).

Điều kiện để hàm hai biến khả vi. Giả sử hàm hai biến $z = f(x,y)$ xác định trong miền $D \subseteq \Re^2$. Giả sử điểm $(x_0, y_0) \in D$. Nếu hàm số $z = f(x,y)$ có các đạo hàm riêng $\frac{\partial f}{\partial x}$ và $\frac{\partial f}{\partial y}$ liên tục, (theo hai biến x và y) tại điểm (x_0, y_0), thì nó khả vi tại điểm (x_0, y_0), và vi phân toàn phần được tính theo công thức

$$df(x_0,y_0) = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y$$

• Chú ý, do x và y là hai biến số độc lập, nên có thể có $\Delta x = dx$ và $\Delta y = dy$, nên

$$df(x_0,y_0) = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}dy$$

Ví dụ 3.2.8 Tính vi phân toàn phần của hàm số $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

Công thức xấp xỉ Từ công thức vi phân toàn phần ta có

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) \simeq \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y$$

hay công thức tương đương

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \simeq f(x_0,y_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y$$

Ví dụ 3.2.9 Tính gần đúng giá trị của $A = \text{arctg}\left(\frac{1.02}{0.95}\right)$

Đạo hàm hàm hợp $z = f(x(u,v), y(u,v))$. Giả sử hàm hai biến $z = f(x,y)$ xác định trong miền $D \subseteq \Re^2$, trong đó các biến độc lập x và y là các hàm hai biến của u và v, $x = x(u,v), y = y(u,v)$.

Định lý: Nếu hàm số $z = f(x,y)$ khả vi theo x và y. Giả sử các hàm số $x = x(u,v), y = y(u,v)$có các đạo hàm riêng $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v}$. Khi đó, tồn tại các đạo hàm riêng $\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}$, sao cho

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \times \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \times \frac{\partial y}{\partial u}$$

và

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \times \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \times \frac{\partial y}{\partial v}$$

Ví dụ 3.2.10 Giả sử $z = f(x, y) = e^x \cos(y)$ trong đó $x = uv, y = \frac{u}{v}$. Tính các đạo hàm riêng

$$\frac{\partial f}{\partial u}; \qquad \frac{\partial f}{\partial v}$$

3.2.5 Đạo hàm hàm hợp

Giả sử hàm hai biến $z = f(x, y)$ xác định trong miền $D \subseteq \Re^2$, trong đó các biến độc lập x và y là các hàm một biến của t, $x = x(t), y = y(t)$.

Định lý: Nếu hàm số $z = f(x, y)$ khả vi theo x và y và các hàm số $x = x(t), y = y(t)$ khả vi theo biến t, thì hàm số $z = f(x(t), y(t))$ khả vi theo biến t và

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \times \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \times \frac{dy}{dt}$$

Ví dụ 3.2.11 Giả sử $z = f(x, y) = x^2 - xy + 2y^2$, trong đó $x = e^{-t}, y = \sin(t)$. Tính đạo hàm theo t

$$\frac{df(x, y)}{dt}$$

Đạo hàm hàm hợp $z = f\Big(x, y(x)\Big)$. Giả sử hàm hai biến $z = f(x, y)$ xác định trong miền $D \subseteq \Re^2$, trong đó $y = y(x)$, là hàm một biến của x.

Định lý: Nếu hàm số $z = f(x, y)$ khả vi theo x và y và hàm số $y = y(x)$ khả vi theo biến x, thì hàm số $z = f\Big(x, y(x)\Big)$ khả vi theo biến x và

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \times \frac{dy}{dx}$$

Ví dụ 3.2.12 Giả sử $z = f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$, trong đó $y = \sin^2(x)$. Tính đạo hàm theo x

$$\frac{df(x, y)}{dx}$$

3.2.6 Cực trị của hàm hai biến số

Định nghĩa. Giả sử hàm hai biến $z = f(x\ y)$ xác định trong lân cận $U(x_0, y_0)$ của điểm $(x_0, y_0) \in D \subseteq \Re^2$.

- Hàm số $z = f(x, y)$ đạt cực đại (địa phương) tại điểm (x_0, y_0), nếu

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y), \forall (x, y) \in U(x_0, y_0)$$

- Hàm số $z = f(x, y)$ đạt cực tiểu (địa phương) tại điểm (x_0, y_0), nếu

$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y), \forall (x, y) \in U(x_0, y_0)$$

- Điểm (x_0, y_0) được gọi là điểm cực trị (hoặc cực đại hoặc cực tiểu) của hàm số $f(x, y)$

Ví dụ 3.2.14 Hàm số $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ đạt cực tiểu tại điểm $(0, 0)$ vì với mọi điểm $(x, y) \neq (0, 0)$, có $f(x, y) = x^2 + y^2 > 0 = f(0, 0)$

Điều kiện cần của cực trị. Giả sử hàm hai biến $z = f(x, y)$ xác định trong lân cận $U(x_0, y_0)$ của điểm $(x_0, y_0) \in D \subseteq \Re^2$. Nếu hàm số $z = f(x, y)$ đạt cực trị (địa phương) tại điểm (x_0, y_0), và tại đó tồn tại các đạo hàm riêng $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$, thì

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0$$

và

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$$

- Điểm (x_0, y_0) mà tại đó các đạo hàm riêng trượt tiêu, được gọi là điểm dừng của hàm số $f(x, y)$

Điều kiện đủ của cực trị Giả sử (x_0, y_0) là điểm dừng của hàm hai biến $z = f(x, y)$ và hàm $z = f(x, y)$ có đạo hàm bậc 2 trong lân cận $U(x_0, y_0)$ của điểm $(x_0, y_0$. Đặt $A = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}, B = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}, C = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}$

- Nếu $C^2 - AB < 0$, thì hàm số $z = f(x, y)$ đạt cực trị tại điểm (x_0, y_0). Điểm (x_0, y_0) là điểm cực tiểu nếu $A > 0$, là điểm cực đại nếu $A < 0$.

- Nếu $C^2 - AB > 0$, thì hàm số $z = f(x, y)$ không đạt cực trị tại điểm (x_0, y_0).

- Nếu $C^2 - AB = 0$, thì chưa kết luận được hàm số $z = f(x, y)$ đạt cực trị hay không tại điểm (x_0, y_0).

Ví dụ 3.2.15 Hàm số $z = f(x, y) = x^2 + y^2 + 4x - 2y + 8$ đạt cực tiểu tại điểm $(-2, 1)$.

3.2.7 Giá trị lớn nhất và bé nhất

Giả sử hàm hai biến $z = f(x, y)$ xác định và liên tục trong một miền đóng và giới nội $D \subseteq \Re^2$.

Định lý Weierstrass: Hàm hai biến $z = f(x, y)$ xác định và liên tục trong một miền đóng và giới nội đạt giá trị lớn nhất ($f_{\max}$) và bé nhất ($f_{\min}$)trong D

- Có thể đạt cực trị tại các điểm dừng trong D
- Có thể đạt cực trị trên biên của miền D

Thủ tục tìm $f_{\max}$ và $f_{\min}$:

- Tìm các giá trị của hàm f(x,y) tại các điểm dừng trong miền D
- Tìm giá trị lớn nhất của hàm $f(x, y)$ trên ∂D (biên của miền D)
- Khi đó, $f_{\max} = \max\{$các giá trị hàm f trong 1 và 2$\}$
- và $f_{\min} = \min\{$các giá trị hàm f trong 1 và 2$\}$

Ví dụ 3.2.16. Tìm giá trị lớn nhất và bé nhất của hàm số $z = f(x, y) = x^2 + 2xy + 2y^2$ trong miền D đóng hình tam giác có các đỉnh A(-1, 1), B(2, 1) và C(-1, -2).

- Từ các phương trình

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 2y = 0$$

và

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2x + 4y = 0$$

- Hệ phương trình cho điểm dừng là $(0, 0) \in D$ và $f(0, 0) = 0$.

- Cạnh AB có phương trình y=1, nên $f(x, 1) = x^2 + 2xy + 2 = (x + 1)^2 + 1 \geq 1$. Vậy $f_{\min} = f(-1, 1) = 1$.

- Chú ý, $f(A) = f(-1, 1) = f_{\min}(-1, 1) = 1, f(B) = f(2, 1) = 10$

- Cạnh AC có phương trình x=-1, nên $f(-1, y) = 1 - 2y + 2y^2, -2 \leq y \leq 1$. Có $f_{min} = f(-1, 1/2) = 1/2$

- Chú ý, $f(C) = f(-1, -2) = 13$

• Cạnh BC có phương trình y=x-1, nên $f(x,y) = f(x,x-1) = 5x^2 - 6x + 2$. Có $f_{\min} = f(3/5, 2/5) = 1/5$

• Xét tập các giá trị $\{0, 1, 10, 1/2, 13, 1/5\}$. Vậy $f_{\min} = 0, f_{\max} = 13$

3.2.8 Cực trị có điều kiện

Giả sử hàm hai biến $z = f(x,y)$ xác định trong lân cận $U(x_0, y_0)$ của điểm $(x_0, y_0) \in D \subseteq \Re^2$. Hàm hai biến $z = f(x,y)$ đạt cực đại tại điểm (x_0, y_0) với điều kiện

$$\varphi(x,y) = 0$$

nếu

- Điểm (x_0, y_0) thỏa mãn điều kiện $\varphi(x_0, y_0) = 0$
- Với mọi điểm (x,y) thuộc lân cận điểm (x_0, y_0), có

$$f(x,y) \leq f(x_0, y_0)(f(x,y) \geq f(x_0, y_0))$$

Cực trị có điều kiện. Giả sử hàm hai biến $z = f(x,y)$ xác định trong lân cận $U(x_0, y_0)$ của điểm $(x_0, y_0 \in D \subseteq \Re^2$. Hàm hai biến $z = f(x,y)$ đạt cực tiểu tại điểm (x_0, y_0) với điều kiện

$$\varphi(x,y) = 0$$

nếu

- Điểm (x_0, y_0) thỏa mãn điều kiện $\varphi(x_0, y_0) = 0$
- Với mọi điểm (x,y) thuộc lân cận điểm (x_0, y_0), có

$$f(x,y) \geq f(x_0, y_0)$$

Phương pháp tìm cực trị có điều kiện. Từ điều kiện $\varphi(x,y) = 0$ suy ra sự phụ thuộc giữa x và y, cụ thể $y = g(x)$, thế vào đẳng thức $\varphi(x,y) = 0$, có hàm một biến $z = f(x, g(x))$. Cực trị của hàm một biến $z = f(x, g(x))$ cho lời giải cực trị có điều kiện. Chú ý: Phương pháp này thường có hiệu quả nếu điều kiện giữa x và y là tuyến tính, $y = ax + b$.

Ví dụ 3.2.17 Tìm cực trị của hàm số $z = f(x,y) = x^2 + y^2$ thỏa mãn $x + y = 10$

- Từ phương trình $x + y = 10$ suy ra $y = 10 - x$

- Khi đó, hàm $z = f(x, y) = x^2 + (10 - x)^2 = 2x^2 - 20x + 100$
- Tại điểm (5,5) hàm số có cực tiểu, vì $z(5) = f_{\min} = f(5, 5) = 50$

Phương pháp nhân tử Lagrange:

- Lập hàm Lagrange, với nhân tử λ là một số thực

$$L_\lambda = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$$

- Tìm các điểm dừng (x_0, y_0) ứng với các giá trị λ từ hệ các phương trình

$$\frac{\partial L_\lambda}{\partial x} = 0; \frac{\partial L_\lambda}{\partial x} = 0; \varphi(x, y) = 0$$

- Tìm vi phân cấp hai của hàm L_λ

$$d^2L_\lambda = \frac{\partial^2 L_\lambda}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 L_\lambda}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 L_\lambda}{\partial y^2}dy^2$$

- Xác định cực trị có điều kiện với điểm dừng (x_0, y_0), tính vi phân cấp hai

$$D = d^2L_\lambda(x_0, y_0),$$

- Chú ý, từ điều kiện $\varphi(x, y) = 0$, lấy vi phân hai vế, suy ra các vi phân dx và dy thỏa mãn

$$d\varphi(x_0, y_0) = \frac{\partial\varphi(x_0, y_0)}{\partial x} + \frac{\partial\varphi(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$$

- Trường hợp D không đổi dấu khi dx và dy thay đổi: Nếu $D > 0$, thì $z = f(x, y)$ đạt cực tiểu tại điểm (x_0, y_0) với điều kiện $\varphi(x, y) = 0$. Nếu $D < 0$, thì $z = f(x, y)$ đạt cực đại tại điểm (x_0, y_0) với điều kiện $\varphi(x, y) = 0$
- Trường hợp D đổi dấu khi dx và dy thay đổi: hàm $z = f(x, y)$ không đạt cực trị tại điểm (x_0, y_0) với điều kiện $\varphi(x, y) = 0$.
- Có thể sử dụng ma trận Hess.

Ví dụ 3.2.18 Tìm cực trị của hàm số $z = f(x, y) = x + 2y$ thỏa mãn $x^2 + y^2 = 5$

- Xét hàm Lagrange

$$L_\lambda(x, y) = x + 2y + \lambda(x^2 + y^2 - 5)$$

- Giải các phương trình

$$\frac{\partial L_\lambda(x, y)}{\partial x} = 1 + 2\lambda x = 0; \frac{\partial L_\lambda(x, y)}{\partial y} = 2 + 2\lambda y = 0; x^2 + y^2 = 5$$

• Xác định các điểm dừng $(-1,-2)$ và $(1,2)$, vì

$$x_0 = -\frac{1}{2\lambda}; y_0 = -\frac{1}{\lambda}; \lambda = \pm\frac{1}{2}$$

• Chú ý: Với $\lambda = \frac{1}{2}$, thì có điểm dừng $(-1,-2)$. Với $\lambda = -\frac{1}{2}$, thì có điểm dừng $(1,2)$.

Vi phân toàn phần bậc hai:

$$D = d^2L_\lambda(x,y) = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}dy^2 =$$

$$= 2\lambda d^2x + 2\lambda d^2y$$

Do

• $\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2\lambda$

• $\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2\lambda$

• $\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0$

• Các giá trị cực trị có điều kiện

$$f_{\min} = f(-1,-2) = -5; f_{\max} = f(1,2) = 5$$

• Với các giá trị $\lambda = \pm\frac{1}{2}$, ta xét các vi phân bậc hai $D = d^2L_\lambda$

-$D = d^2L_{\frac{1}{2}} = dx^2 + dy^2 > 0$

-$D = d^2L_{-\frac{1}{2}} = -dx^2 - dy^2 < 0$

• Vậy, ta có kết luận

- Hàm số $z = f(x,y)$ đạt cực tiểu tại điểm $(-1,-2)$, ứng với $\lambda = \frac{1}{2}$

- Hàm số $z = f(x,y)$ đạt cực tiểu tại điểm $(1,2)$, ứng với $\lambda = -\frac{1}{2}$

Bài tập

3.2.1 Tính giá trị gần đúng

$$A = \sqrt{(1.02)^2 + (1.96)^2}$$

3.2.2 Tìm các giá trị cực trị của hàm số sau

$$z = f(x,y) = 2x^2 + 2xy + y^2 - x + y + 2$$

3.2.3 Tìm các giá trị cực trị của hàm số sau

$$z = f(x, y) = 2x^3 + 6xy - 6x - 3y^2 - 30y + 2$$

3.2.4 Tìm các giá trị cực trị có điều kiện của hàm số sau

$$z = f(x, y) = 6 - 4x - 3y \quad \text{với điều kiện} \quad x^2 + y^2 = 1.$$

3.2.5 Tìm các giá trị cực trị có điều kiện của hàm số sau

$$z = f(x, y) = x^2 + y^2 \quad \text{với điều kiện} \quad \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1.$$

3.2.6 Tìm cực trị của hàm số

$$z = f(x, y) = x^3 + 2xy - 8y^3$$

3.2.7 Tìm cực trị của hàm số

$$z = f(x, y) = -3x^2 - 4y^2 + 2xy - 2x + 3y + 1$$

3.3 Ứng dụng trong phân tích kinh tế

3.3.1 Đạo hàm và giá trị cận biên

Giá trị cận biên. Giả sử $y = f(x)$ là hàm số với các biến số kinh tế x, y. Giả sử $x_o \in D(f)$. Hàm số $My = f'(x)$ được gọi là hàm cận biên. Giá trị $My(x_o) = f'(x_o)$ là giá trị hàm cận biên tại điểm x_o.

Ý nghĩa.

1. Tại điểm x_o, khi đối số x thay đổi một đơn vị thì giá trị hàm số $f(x)$ thay đổi một lượng xấp xỉ $My(x_o) = f'(x)$.
2. Nếu $My(x_o) = f' > 0$ thì $f(x)$ sẽ thay đổi cùng chiều với đối số x.
3. Nếu $My(x_o) = f' < 0$ thì $f(x)$ sẽ thay đổi ngược chiều với đối số x.

Ví dụ 3.3.1 Cho hàm doanh thu $R(Q) = 1200Q - Q^2, Q \geq 0$

1. Tìm hàm doanh thu biên $MR(Q)$?
2. Tại $Q_o = 590$, sau khi Q tăng một đơn vị thì doanh thu sẽ thay đổi bao nhiêu đơn vị?